MATHÉMATIQUES

(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 3 heures

Le problème a pour objet la recherche et l'étude de fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+^*$ (et notées brièvement y) vérifiant, pour certaines valeurs des paramètres réels m et k, l'équation différentielle.

$$(E_{m,k}) : y' + \frac{my}{x} + ky = 0 \quad (x > 0)$$

La troisième partie est indépendante des deux premières.

Dans les deux premières parties, $m = 2$, et dans la troisième, $m = 1$.

Préliminaires

1° Montrer que $\forall x > 0 \qquad x > \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

2° On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} (\cos t)^{2n}\, dt.$

Calculer I_n par récurrence.

PREMIÈRE PARTIE

1° A l'aide du changement de fonction inconnue $z = xy$ $(x > 0)$, déterminer toutes les solutions de $(E_{2,k})$ suivant les valeurs de k.

2° Montrer que, pour toute valeur de k, il existe une solution de $(E_{2,k})$ et une seule, notée f_k, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et telle que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_k(x) = 1$, et déterminer cette solution.

On désigne par (C_k) la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé.

3° *a.* Construire (C_0) et (C_{-1}). (On choisira une unité de longueur convenable sur les axes.)

b. Déterminer à 25×10^{-3} près, la plus petite valeur x_1 telle que $x_1 > 0$ et $f'_1(x_1) = 0$. On indiquera la méthode utilisée. (On pourra considérer la fonction $h : x \longmapsto x - \operatorname{tg} x$ $(x > 0)$, et montrer que $4{,}2 < x_1 < 4{,}6$.)

Construire avec soin, sur une feuille de papier millimétrique, la courbe (C_1) sur l'intervalle $]0, 2\pi]$. (On prendra 2 cm pour unité de longueur sur les axes.)

Indiquer, sur papier libre, l'allure de (C_1) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4° Indiquer une construction géométrique simple permettant d'obtenir (C_k) à partir de (C_1) pour $k > 0$, et (C_k) à partir de (C_{-1}) pour $k < 0$.

DEUXIÈME PARTIE

1° Soient φ et ψ les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x} \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \psi(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} \\ \psi(0) = 1. \end{cases}$$

ECOLES AGRONOMIQUES 1980 (I)
1803

. . . / . . .

Montrer qu'il existe une fonction $\bar{\varphi}$ (respectivement $\bar{\psi}$) indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \bar{\varphi}(x^2)$$

(respectivement $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \bar{\psi}(x^2)$).

(On pourra utiliser un développement en série entière.)

2° Trouver toutes les fonctions u de la variable réelle r ($r > 0$) telles que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ par $F(x, y, z) = u(r)$ où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ vérifie la relation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + kF = 0.$$

3° Montrer que pour toute valeur de k, il existe une fonction F et une seule vérifiant les conditions du 2° et dont le prolongement par 1 en (0, 0, 0) est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^3$.

TROISIÈME PARTIE

1° Déterminer toutes les solutions de $(E_{1,0})$.

2° Déterminer toutes les solutions développables en série entière de $(E_{1,k})$. (On ne cherchera pas à exprimer ces solutions à l'aide de fonctions élémentaires.)

Montrer que, pour toute valeur de k, il existe une solution et une seule, notée w_k, développable en série entière telle que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} w_k(x) = 1$ et donner la valeur du coefficient du développement en série entière de w_k. Quel est le rayon de convergence de cette série?

3° On se propose de montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad w_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos t)\, dt.$$

a. Développer en série entière la fonction $x \longmapsto \cos(x \cos t)$. ($x \in \mathbb{R}$).

On pose $\cos(x \cos t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\, x^{2n}$. Quelle est l'expression de $a_n(t)$?

b. On pose $u_n(t) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p(t)\, x^{2p}$.

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\cos(x \cos t) - u_n(t)| \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}.$$

c. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi [\cos(x \cos t) - u_n(t)]\, dt = 0.$$

En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^\pi \cos(x \cos t)\, dt = \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\, x^{2n}\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\pi a_n(t)\, dt\right] x^{2n}.$$

d. Conclure.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail